$f_k(x) = x^4 - kx^2, k \in \mathbb{R}$

$f_k'(x) = 4x^3 - 2kx$

$f''_k(x) = 12x^2 - 2k$

$f'''_k(x) = 24x$

relative Extrema

notw. : ...

hinr. : ....

$f_k'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 2kx = 0$

$$\Leftrightarrow x(4x^2-2k)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \lor 4x^2-2k=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \lor x^2-0{,}5k=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \lor x^2=0{,}5k$$
$$\Leftrightarrow x=0 \lor \underbrace{x=\sqrt{0{,}5k} \lor x=-\sqrt{0{,}5k}}_{\text{für } k>0}$$

$$f_k''(x)\neq 0$$

1. Fall: 1. $k>0$

$$f_k''(\pm\sqrt{0{,}5k}) = 12\cdot 0{,}5k-2k = \underbrace{4k}_{>0}\neq 0$$

$$\Rightarrow T_1(\sqrt{0{,}5k} \mid -\tfrac{1}{4}k^2)$$
$$T_2(-\sqrt{0{,}5k} \mid -\tfrac{1}{4}k^2)$$

$$f_k''(0)=-2k<0$$

$$H(0 \mid 0)$$

2. Fall $k = 0$ (3 Werte fallen zusammen)

Nur eine Lsg : $x = 0$

$f_k''(0) = -2 \cdot 0 = 0$

keine Aussage möglich

3. Fall $k < 0$ (Wurzeln ex. nicht)

$x = 0$ $f_k''(0) = -2\underbrace{k}_{<0} > 0 \Rightarrow TIP$

$\underline{TIP(0/0)}$

zu Teil b:

Ortskurve? Kurve, auf der alle Extrema liegen

Nur sinnvoll für $k > 0$

$T_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}k} \,\middle|\, -\frac{1}{4}k^2\right)$ | $T_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k} \,\middle|\, -\frac{1}{4}k^2\right)$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}k}$; $y = -\frac{1}{4}k^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}k$

$\Leftrightarrow k = 2x^2$ $\quad y = -\frac{1}{4}(2x^2)^2$

$\Leftrightarrow y = -x^4$

$x = -\sqrt{\frac{1}{2}k}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}k$

weiter geht's wie links